参考文献

1) M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 4205.

2) M. Suzuki, **56** (1987) 4221.

3) M. Suzuki, **57** (1988) 1.

4) R. Jentzsch, Acta Mathematica **41** (1918) 253.

5) M. Suzuki, Phys. Lett. **24A** (1967) 470.

14. 直交多項式におけるCAM理論

名大・理・数学　青　本　和　彦

1. Cauchy, Stietjes, Jacobi鎖

([1],[2]) CAM理論との関連を述べる前に，直交多項式の数学的背景を復習する。

変数 X の収束又は漸近級数

$$(1.1)\qquad \varphi = c_0 + c_1X + c_2X^2 + \cdots \qquad \in \boldsymbol{C}[[X]]$$

に対して

$$(1.2)\qquad \varphi_1 = \frac{X}{\varphi - c_0} = \frac{1}{c_1 + c_2X + \cdots}$$

$$= c_0' + c_1'X + \cdots$$

は，$c_1 \neq 0$ ならば，又 φ と同様の級数である。この操作（アルゴリズム）を T とおく。

$$(1.3)\qquad \varphi_1 = T\varphi$$

以下繰り返しが可能なものとする：

$$(1.4)\qquad \varphi_n = T^n\varphi,\quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

且つ

$$\varphi_n = c_0^{(n)} + c_1^{(n)} X + \cdots \qquad (1.5)$$

$$c_0^{(n)} \neq 0$$

となっているものとする。こうしてφの形式的連分数展開(以下C.F.と略す)

$$\varphi = c_0 + \frac{X|}{|c_0^{(1)}} + \frac{X|}{|c_0^{(2)}} + \cdots \qquad (1.6)$$

が得られる。これを正則なCauchy鎖という(1.1)が必ずしも正則とは限らないが，以下の議論では正則なものに限る事にする。さらに簡単のために $c_0 = 0$の場合のみを考える。

$X = 1/x$とおくとφはxのLaurent級数

$$\varphi = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots \qquad (1.7)$$

であって，φはStieljes鎖

$$\varphi = \frac{1|}{|c_0^{(1)} x} + \frac{1|}{|c_0^{(2)}} + \frac{1|}{|c_0^{(3)} x} + \cdots \qquad (1.8)$$

によって展開される。(1.8)は対応$\varphi = u_1/u_0$によって，次の漸化式と等価である：

$$\begin{cases} u_{n-1} = c_0^{(n)} u_n + u_{n+1} & n \text{ odd} \\ u_{n-1} = c_0^{(n)} x u_n + u_{n+1} & n \text{ even} \end{cases} \qquad (1.9)$$

但し，$u_0 = 1$とおく，変数

$$v_0 = 1, \quad v_1 = u_1, \quad \cdots, \quad v_{\nu+1} = u_{2\nu+1}/u_{2\nu-1}, \quad \nu \geq 1, \qquad (1.10)$$

を導入すると，(1.9)は漸化式

$$v_{n+1} = (A_n x + B_n) v_n - c_n v_{n-1}, \quad n \geq 1 \qquad (1.11)$$

に縮約され，(1.7)は

$$\varphi = \frac{-c_1|}{|A_1 x + B_1} - \frac{c_2|}{|A_2 x + B_2} - \cdots \qquad (1.12)$$

の形のJacobi鎖に展開される。このJacobi鎖をはじめのn段階で切ったもの

$$\varphi_n = \frac{-c_1|}{|A_1 x + B_1} - \frac{c_2|}{|A_2 x + B_2} - \cdots - \frac{c_n|}{|A_n x + B_n} \qquad (1.13)$$

は有理式 $q_n(x)/p_n(x)$ (p_n, q_nは各々 $\deg p_n = n$, $\deg q_n = n-1$の多項式）で表わされ，$\varphi(x)$の$(n, n-1)$型の Padé 近似になっている：

$$(1.14) \qquad \frac{q_n(x)}{p_n(x)} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots + \frac{c_{2n}}{x^{2n}} + 0\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right).$$

しかしすべてのLaurent 級数 φ について (1.13) が可能なわけではなく，正則な φ に限られる事に注意しなくてはならない。

2. Jacobi 行列と直交多項式

([3], [4], [5]). Jacobi鎖 (1.12) にはJacobi行列 J

$$(2.1) \qquad J = \begin{bmatrix} a_0 & b_1 & & \\ b_1 & a_1 & b_2 & \\ & b_2 & a_2 & b_3 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

が対応する。ここで

$$(2.2) \qquad a_{n-1} = -\frac{B_n}{A_n}, \quad b_n = \frac{1}{A_n} \qquad n \geq 1$$

である。列ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t(v_0, v_1, v_2, \cdots)$ に関して，左端境界値問題 ($v_{-1} = 0$) の固有ベクトル方程式

$$(2.3) \qquad (x - J)\boldsymbol{v} = 0$$

は (1.11) と等価であって，φ はちょうどその Green関数に等しい：

$$(2.4) \qquad \varphi = \frac{1}{x - a_0 - b_1(v_1/v_0)} = G(0, 0|x)$$

但し $G(m, n|x) = ((x-J)^{-1} e_m, e_n)$.

$$e_m = {}^t(0, \cdots, 0, \underset{m\text{th}}{1}, 0, \cdots\cdots).$$

$p_n(x)$, $q_n(x)$ $n \geq 0$ は漸化式 (1.11) をみたすが $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ はさらに直交多項式になっている。すなわち

$$(2.5) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} p_m(x) p_n(x)\, d\alpha(x) = \delta_{m,n}$$

をみたす。ここで $d\alpha(t)$ は Stieltjes密度であって J の射影作用素 $dE(t)$ とは

(2.6) $$d\alpha(t) = (dE(t)\, e_0, e_0)$$

(2.7) $$(x - J)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE(t)}{x - t}$$

の関係で結ばれている。逆に内積

(2.8) $$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x)\, d\alpha(x)$$

から出発して，列 $\{1, x, x^2, \cdots\}$ の Schmidtの直交化を適用して $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ を得る事も出来る。直交多項式は又 $d\alpha(t)$ を使って，直接陽に積分表示される：

(2.9) $$p_n(x) = \frac{(D_{n-1}D_n)^{-\frac{1}{2}}}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \prod_{0\leq\nu\leq\mu\leq n} (x_\nu - x_\mu)^2$$

$$d\alpha(x_0)\, d\alpha(x_1) \cdots d\alpha(x_n)$$

$$= k_n x^n + \cdots,$$

$$k_n = (D_{n-1}/D_n)^{\frac{1}{2}}, \quad A_n = k_n / k_{n-1},$$

(2.10) $$D_n = \frac{1}{(n+1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{0\leq\nu<\mu\leq n} (x_\nu - x_\mu)^2$$

$$d\alpha(x_0)\, d\alpha(x_1) \cdots d\alpha(x_n).$$

$p_n(x)$ は統計的密度

$$\prod_{0\leq\nu<\mu\leq n} (x_\nu - x_\mu)^2\, d\alpha(x_0) \cdots d\alpha(x_n)$$

の1点相関関数である事にも注意すべきである。実際，直交多項式の漸近的性質は，さらに乱行列（Random matrices）の相関関数にも拡張されるものと思われる（[6]）。

以下 $d\alpha(t)$ の台は $[a, 1]$ 又は $(-\infty, 1]$ と仮定する。次の事実がPadé近似の実質的根拠を与える。

<u>Markoffの定理</u>　　$x \in \boldsymbol{C} - [a, b]$ ならば

(2.11) $$\varphi(x) = \int_b^a \frac{d\alpha(t)}{x - t} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{x^\nu}$$ に対して

(2.12) $$\lim_{n\to\infty}\frac{q_n(x)}{p_n(x)}=\varphi(x).$$

3．CAM 理論

以下 $d\alpha(t)$ は区間 $[a,\ 1]$ 又は $(-\infty,\ 1]$ に台を持つものとする。当分 $d\alpha(t)>0$ とする。すると $p_n(x)$ は直交多項式の一般論から $[a,\ 1]$ 内に単根を n 個持つ。それらを $x_{1,n}>x_{2,n}>\cdots>x_{n,n}$ とおく。すると

(3.1) $$\frac{q_n(x)}{p_n(x)}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\lambda_{\nu,n}}{x-x_{\nu,n}}$$

と書けるが，$\lambda_{\nu,n}$ はつねに正で，Christoffel 数と呼ばれる重要な数である。そして

(3.2) $$\lambda_{\nu,n}=\frac{k_n}{k_{n-1}}\ \frac{1}{p_{n-1}(x_{\nu,n})p_n'(x_{\nu,n})}$$

とも表わされる。

直交多項式についての基本的問題のひとつは Stieltjes 測度 $d\alpha(t)$ と $p_n(x)$，$q_n(x)$ の $n\to+\infty$ での漸近展開との関連を追求するものである。歴史的には G. Darboux ([7]) の研究に始まる。それにひきつづき，収束級数の特異点での振舞いについての J. Hadamard ([8])，S. Mandelbrojt ([9]) などの研究がある一方，G. Szegö が Toeplitz 行列式及び直交多項式の極限定理を確立した ([3], [10])。

さて CAM は $d\alpha(t)$ の $t=1$ における特異性の振舞い（臨界指数）が，零点 $\{x_{\nu,n}\}_{1\le\nu\le n}$ と $\{\lambda_{\nu,n}\}_{1\le\nu\le n}$ にいかに反映するか，逆に後者から $d\alpha(t)$ の臨界指数をいかに決定するかを数学的に与えようとしているかに見える。今，$d\alpha(t)$ が次の形に書けるとする。

(3.3) $$d\alpha(t)=(1-t)^{\lambda}f(t)dt$$

ここで $f(t)$ は L^1-関数（もちろん連続，可微分などに制限してもよい）で，

(3.4) $$f(t)\ge\delta>0,\qquad \lambda>-1.$$

<u>Szegö 予想</u>　ν を固定するとき，

(3.5) $$\text{(イ)}\quad \begin{aligned}1-x_{\nu,n}&\sim n^{-2}h_\nu\\ \lambda_{\nu,n}&\sim n^{-2\lambda-2}h_\nu'\end{aligned}\qquad n\to+\infty$$

又は

$$(3.6)\quad (\text{ロ})\quad \begin{aligned} 1-x_{\nu,n} &\sim n^{-1}h_\nu \\ \lambda_{\nu,n} &\sim n^{-\lambda-1}h'_\nu \end{aligned} \qquad n\to+\infty$$

ここで h_ν, h'_ν は ν, λ には依存するが n には依存しない正数である。(イ) は $d\alpha(t)$ の台がコンパクト，(ロ) はその台が非コンパクトの場合に起こる。

さらにくわしく Laurent 展開

$$(3.7)\quad \begin{aligned} 1-x_{\nu,n} &= (n^{-2}\text{又は}\,n^{-1})\left\{h_\nu+\frac{1}{n}h_\nu^{(1)}+\cdots\right\} \\ \lambda_{\nu,n} &= (n^{-2(\lambda+1)}\text{又は}\,n^{-\lambda-1})\left\{h'_\nu+\frac{1}{n}h'^{(1)}_\nu+\cdots\right\} \end{aligned}$$

の成立が予想される。(イ) は Jacobi 多項式 $d\alpha(t)=(1-t)^\lambda(1+t)^\mu dt$ on $[-1,1]$，(ロ) は Laguerre 多項式 $d\alpha(t)=(1-t)^\lambda e^{-(1-t)}dt$ on $(-\infty,1]$ の場合にみたされる ([3])。

さて CAM は上の予想の逆を主張している。

CAM予想　(3.5) 又は (3.6) 又は (3.7) の仮定の下で，$d\alpha(t)$ は $[a,1]$ 又は $(-\infty,1]$ で連続であるかぎり，$t=1$ において (3.3) をみたすだろうか？

CAM理論はこの事実を暗示している。しかし我々の状況下では (3.1) の極 $\{x_{\nu,n}\}_{1\le\nu\le n}$ は一般に ν を固定する限りすべて1に近づくのであるからただひとつの $x_{\nu,n}$ のみを取り立てて予測する事が出来ないむずかしさがある。

今までは $\lambda>-1$ という仮定をしたが，Padé近似の理論では $\lambda\le-1$ の場合でも，発散積分の有限部分をとれば，同様の議論が可能な場合がある。次の予想が成立すると考えられる。

零点予想　(3.3) の仮定の下に，$\lambda<-1$ に対して，$n\gg1$ において $1<x<\infty$ に存在する $p_n(x)$ の零点の個数 N は

$$(3.8)\qquad N=\begin{cases} 1 & \lambda\in(-2k,-2k+1) \\ & \quad k=1,2,3,\cdots \\ 0 & \lambda\in(-2k-1,-2k) \\ & \quad k=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

実際 G. Szegö は Jacobi 多項式の場合にこれを証明している ([3])。特に CAM は $-2<\lambda<-1$ の場合にも，関数

$$\frac{\lambda_{1,n}}{x - x_{1,n}}, \quad 1 < x_{1,n} \tag{3.9}$$

に適用する事によって正しい指数 λ を与えているのである（[11], [12]）。

しかし，これらの事実の数学的証明は容易とは言えない。何か新しい視点を必要としているのかも知れない。

文 献

[1] O. Perron, Die Lehre von der Kettenbrüchen II, Teubner 1957.

[2] H. S. Wall, Analytic theory of continued fractions, Chelsea 1967.

[3] G. Szegö, Orthogonal polynomials, A. M. S., Colloquium Pub. 23 (1975).

[4] G. Freud, Orthogonal polynomials, Pergamon, 1971.

[5] N. I. Akhieser, The classical moment problem, Oliver Boyd, 1965.

[6] M. L. Mehta, Random matrices and the statistical theory of energy levels, Acad. Press 1967.

[7] G. Darboux, Mémoir sur l'approximation des fonctions de très grands nombres, J. de Math., 4 (1878), 5-56, 377-416.

[8] J. Hadamard, Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, Oeuures 1, 1968.

[9] S. Mandelbrojt, Les singularités des fonctions analytiques représentés par une serie de Taylor, Gauthrérs Villars 1932.

[10] G. Szegö, Collected Papers Vol II (1927-1943).

[11] 鈴木増雄,「相転移の統一理論に向けて－超有効場理論とCAM」, 数理科学, 301 (1988) 5-14.

[12] ———, Continued fraction CAM theory, J. of Phys. Soc. Japan 57 (1988) 1-4.

[13] P. G. Nevai, Orthogonal polynomials, Mem. A. M. S., 18 (1979) No. 213.